Neka je $f(x) > 0$. Tada je $cs(x) < f(x)$ jer je $0 < c < 1$ i $s(x)$ konačan broj. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

postoji n_0 tako da važi

$$cs(x) \leq f_{n_0}(x) \leq f(x),$$

pa $x \in E_{n_0}$.

Važi

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs d\mu.$$

Stavimo

$$\varphi_s(F) = \int_F s d\mu, \; F \in \mathcal{M}.$$

Na osnovu Propozicije 4.1 a) sledi da je φ_s mera, i kako je $E_n \subseteq E_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$, na osnovu Teoreme 2.1 sledi $\varphi_s(E_n) \to \varphi_s(X)$, $n \to \infty$.

Dobijamo

$$\int_X f_n d\mu \geq c\varphi_s(E_n) \Rightarrow \alpha \geq c \int_X s d\mu.$$

U graničnom procesu, kad $c \to 1$, se dobija

$$\alpha \geq \int_X s d\mu.$$

Sada, uzimajući supremum po s, $0 \leq s \leq f$, sledi

$$\alpha \geq \int_X f d\mu$$

i teorema je dokazana. ■

Važna posledica je sledeće tvrđenje, uopštenje Propozicije 4.1 b).

Propozicija 4.2. Za merljive funkcije $f : X \to [0, \infty]$, $\quad g : X \to [0, \infty]$ važi

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Dokaz: Koristićemo Teoremu 1.7. Neka su $\tilde{s}_n$ i $\tilde{\tilde{s}}_n$ nizovi jednostavnih merljivih funkcija tako da važi

$$0 \leq \tilde{s}_1 \leq \tilde{s}_2 \leq \ldots \leq f, \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n(x) = f(x), \; x \in X,$$